# Polynômes orthogonaux

## §1. Définitions

<u>Déf. 1</u> Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $\omega : I \to \mathbb{R}_{>0}$ une fonction réelle strictement positive sur $I$ telle que pour tout polynôme $p(x)$

$$\int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fonction-poids}}}{\omega(x)}\, p(x)\, dx < \infty$$

Considérons l'espace $V_p$ de tous les polynômes (en $x$), muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx, \qquad \forall f,g \in V_p .$$

La suite des polynômes orthogonaux par rapport au poids $\omega$ est alors la suite des polynômes

$$p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots$$

telle que $p_k(x)$ est de degré $k$ et

$$(p_m, p_n) = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

<u>Exemple 2</u>
- $I = [-1,1]$, $\omega(x) = 1 \Rightarrow$ polynômes de Legendre
- $I = \mathbb{R}$, $\omega(x) = e^{-x^2} \Rightarrow$ polynômes d'Hermite

Différents choix de standartisation sont possibles:

- on peut demander l'orthonormalité $(p_m, p_m) = 1$ $\forall m$. Ceci fixe $\{p_k(x)\}$ à signe près.
- si $\{q_n(x)\}$ est une suite orthogonale, alors on peut l'orthonormaliser en posant

$$p_n(x) = \frac{q_n(x)}{\sqrt{(q_n, q_n)}}$$

(évidemment $(p_m, p_n) = \delta_{mn}$).

- on peut aussi fixer les polynômes en fixant le coefficient de la puissance la plus grande de $x$ :

$$P_n(x) = x^n + \text{poly}_{n-1}(x)$$

Dans ce cas, les polynômes s'appellent moniques.

- autres possibilités: par exemple, pour les polynômes de Legendre il est standard de demander

$$P_n(1) = 1.$$

<u>Exemple 3</u> Construction de polynômes de Legendre par récurrence:

1). $P_0(x) = c_0$

En imposant $P_0(1) = 1$ on trouve $c_0 = 1$

2). $P_1(x) = b_1 x + c_1$

Comme $(P_0, P_1) = 0$, on a

$$0 = (P_0, P_1) = \int_{-1}^{1} P_0(x) P_1(x) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot (b_1 x + c_1)\, dx =$$

$$= \left( b_1 x^2/2 + c_1 x \right)\Big|_{-1}^{1} = 2c_1$$

Donc $c_1 = 0$ et $P_1(x) = b_1 x$. D'autre part $P_1(1) = 1$ implique $b_1 = 1 \Rightarrow P_1(x) = x$.

3). $P_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$

Nous avons 2 conditions d'orthogonalité:

$$0 = (P_0, P_2) = \int_{-1}^{1} P_0(x) P_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, dx =$$

$$= \left( a_2 \frac{x^3}{3} + b_2 \frac{x^2}{2} + c_2 x \right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} a_2 + 2c_2$$

$$0 = (P_1, P_2) = \int_{-1}^{1} P_1(x) P_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\, dx =$$

$$= \left( a_2 \frac{x^4}{4} + b_2 x^3/3 + c_2 \frac{x^2}{2} \right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} b_2 \Rightarrow b_2 = 0$$

Donc $c_2 = -\frac{a_2}{3}$, $b_2 = 0$ et on obtient

$$P_2(x) = a_2 x^2 - a_2/3$$

De plus $P_2(1) = 1$ implique $a_2 - \frac{a_2}{3} = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2}$,

d'où $P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$.

4). ——— " ————

Donc, en principe on peut trouver le polynôme d'ordre arbitraire dans chaque suite. Quelques premiers polynômes de Legendre:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},$$
$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

---------

<u>Question:</u> peut-on développer les fonctions suffisamment "bonnes" sur I dans la base des polynomes orthogonaux? Autrement dit, a-t-on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_n, f)}{(p_n, p_n)} p_n(x) \quad \text{sur } I?$$

Dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique – oui.

<u>Théorème 4.</u> Pour toute suite de polynômes orthogonaux il existe $a_n, b_n, c_n$ tels que

(1) $$p_n(x) = (a_n x + b_n) p_{n-1}(x) + c_n p_{n-2}(x).$$

Remarque: (1) n'est pas évident a priori, car en principe les autres (en plus de $p_{n-1}, p_{n-2}$) polynômes peuvent être nécessaires.

- Supposons que les polynômes sont moniques (aucune perte de généralité). Donc

$$p_n(x) = x^n + \text{poly}_{n-1}(x) \qquad \forall n.$$

Maintenant nous avons

$$p_n(x) - x p_{n-1}(x) = \cancel{x^n} + \text{poly}^{I}_{n-1}(x) - x(\cancel{x^{n-1}} + \text{poly}^{II}_{n-2}(x))$$
$$= \text{poly}^{III}_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x).$$

Déterminons les coefficients $\{\alpha_k\}$. Pour cela, on multiplie la dernière formule par $\omega(x)\, p_{k'}(x)$ et on intègre ensuite sur $I$. Le résultat dépend de $k'$:

- $$(p_n - x p_{n-1}, p_{k'}) = \underbrace{(p_n, p_{k'})}_{=\,0} - (x p_{n-1}, p_{k'}) =$$

  car les polynômes sont orthogonaux et $k' = 0, \dots, n-1$

  $$= -(x p_{n-1}, p_{k'}) = - \int_I p_{n-1}(x) \cdot \underbrace{x\, p_{k'}(x)} \cdot \omega(x)\, dx =$$

  un polynôme de degré $k'+1$, donc une combinaison linéaire de $p_0(x), p_1(x), \dots p_{k'+1}(x)$

  $$= \begin{cases} 0 & \text{si } k' = 0, 1, \dots, n-3 \\ -(p_{n-1}, x\, p_{n-2}) & \text{si } k' = n-2 \\ -(p_{n-1}, x\, p_{n-1}) & \text{si } k' = n-1 \end{cases}$$

- d'autre part, le membre de droite devien (grâce à l'orthogonalité)

  $$\int_I \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, p_k(x)\, p_{k'}(x)\, \omega(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, \delta_{kk'}\, (p_k, p_{k'})$$

  $$= \alpha_{k'}\, (p_{k'}, p_{k'})$$

- Donc :

  $$\alpha_j = 0 \quad \text{si} \quad j = 0, \dots, n-3$$

  $$\alpha_{n-2} = - \frac{(p_{n-1}, x p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}$$

  $$\alpha_{n-1} = - \frac{(p_{n-1}, x p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$

d'où :

(2) $$p_n(x) = x\, p_{n-1}(x) - \frac{(p_{n-1}, x p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}\, p_{n-1}(x) - \frac{(p_{n-1}, x p_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}\, p_{n-2}(x)$$

**Exemple 5.** Montrons l'utilité de la formule (2) sur l'exemple des polynômes de Legendre.
Supposons qu'on a déjà trouvé

$$p_0(x) = 1 \quad , \quad p_1(x) = x$$

(Notons que ces polynômes sont moniques – en effet, par hasard). Déterminons quelques polynômes suivants:

$$p_2^{\text{mon.}}(x) = x\, p_1(x) - \frac{(p_1, xp_1)}{(p_1,p_1)}\, p_1(x) - \frac{(p_1, xp_0)}{(p_0,p_0)}\, p_0(x)$$

$$= x\cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot x\cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} x\cdot x\, dx}\cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x\cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} 1\cdot dx}\cdot 1 =$$

$$= x^2 - \frac{(x^3/3)\big|_{-1}^{1}}{x\,\big|_{-1}^{1}}\cdot 1 = x^2 - \frac{2/3}{2} = x^2 - 1/3$$

Ceci correspond bien au polynôme $P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$, trouvé précédemment (la différence d'un facteur constant $3/2$ est due aux standartisations différentes – moniques vs $p_k(1) = 1$).

## §2. Formule de Christoffel-Darboux.

Rappelons que si $V$ est un E.H., $\{x_j\}$ une suite orthonormée complète dans $V$ et $f \in V$, alors

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j, f)\, x_j$$

Considérons l'application $P_N : V \to V$ qui à $f$ associe une somme partielle

$$P_N f \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} (x_j, f)\, x_j$$

**Proposition 6.** $P_N^2 = P_N$ (autrement dit, $P_N$ est un projecteur)

▼ $P_N^2 f = \sum_{j=1}^{N} \Big(x_j, \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (x_k, f)\, x_k}_{P_N f}\Big)\, x_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} (x_k, f)\underbrace{(x_j, x_k)}_{\delta_{jk}}\, x_j =$

$$= \sum_{j=1} \sum_{k=1} (x_k, f)\, \delta_{jk}\, x_j = \sum_{j=1} (x_j, f)\, x_j = P_N f \quad \blacktriangledown$$

De façon analogue, considérons l'espace $V_T$ des fonctions $T$-périodiques intégrables, $f \in V_T$. On associe à $f$ sa série de Fourier

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{in\omega t},$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t')\, e^{-in\omega t'}\, dt'$$

Considérons la somme partielle

$$(P_N f)(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega t}$$

projection de $f$ sur $N$ premières harmoniques

et essayons de trouver la forme de $P_N$ plus explicitement :

$$(P_N f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t')\, e^{-in\omega t'}\, dt' \right) e^{in\omega t} =$$

$$= \int_0^T \Bigg( \frac{1}{T} \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(t-t')}}_{\text{suite géométrique}} \Bigg) f(t')\, dt'$$

Nous avons

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(t-t')} = e^{-iN\omega(t-t')} + e^{-iN\omega(t-t')} \cdot e^{i\omega(t-t')} +$$

$$+ e^{-iN\omega(t-t')} \cdot e^{2i\omega(t-t')} + \dots + e^{iN\omega(t-t')} =$$

$$= e^{-iN\omega(t-t')}\, \frac{1 - e^{i(2N+1)\omega(t-t')}}{1 - e^{i\omega(t-t')}} =$$

$$= e^{-iN\omega(t-t')}\, \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega(t-t')} \left( e^{i(N+\frac{1}{2})\omega(t-t')} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega(t-t')} \right)}{e^{i\cdot\frac{1}{2}\omega(t-t')} \left( e^{i\frac{1}{2}\omega(t-t')} - e^{-i\frac{1}{2}\omega(t-t')} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{(2N+1)\omega(t-t')}{2}}{\sin \frac{\omega(t-t')}{2}}.$$

Donc on peut écrire

$$(3) \quad \begin{cases} (P_N f)(t) = \int_0^T K_N(t,t') f(t') \, dt' , \quad \text{où} \\ K_N(t,t') = \dfrac{1}{T} \dfrac{\sin \frac{(2N+1)\omega(t-t')}{2}}{\sin \frac{\omega(t-t')}{2}} \end{cases}$$

c'est-à-dire, $P_N$ est un opérateur intégral à noyau $K_N(t,t')$. Cette formule (3) représente une version-"bébé" de la formule de Christoffel-Darboux pour les polynômes orthogonaux.

Plus précisément, on cherche à réaliser la somme partielle

$$(P_N f)(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(p_j, f)}{(p_j, p_j)} \, p_j(x) \circleddash$$

comme résultat de l'application d'un opérateur intégral à noyau $K_N(x,y)$ à la fonction $f$ :

$$\circleddash \int_I K_N(x,y) f(y) \, dy .$$

<u>But</u> : trouver $K_N(x,y)$.